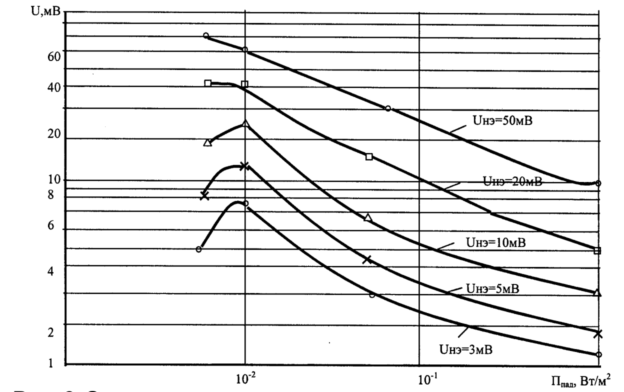

Рис. 3. Зависимость модулирующего напряжения на выходе СВЧ-приемника от плотности потока мощности СВЧ-поля, $F_{мод}$ = 400 Гц

Анализ полученных зависимостей показывает, что максимальное значение модулирующего напряжения на выходе СВЧ-приемника имеет место при некоторых оптимальных для данного пассивного переизлучателя значениях плотности потока мощности СВЧ-поля. Причем для данного типа пассивного переизлучателя и нелинейного элемента (квазибиконический рассеиватель с высокочастотным диодом) оптимальным является плотность потока мощности 0,01 Вт/м^2.

Важный этап эксперимента состоял в проверке возможности дистанционного обнаружения и распознавания мин (специальных технических средств), имеющих акустические датчики, путем воздействия на микрофон, подключенный к пассивному переизлучателю звуковых сигналов в широкой полосе волн (16–20000 Гц). На этом этапе первоначально была проверена возможность передачи тонального сигнала. При этом к выходу генератора ГЗ-33 через усилитель НЧ был подключен динамический громкоговоритель ВА1 (рис. 1). Акустическая связь динамического громкоговорителя с микрофоном обеспечила наличие на его выходе электрического сигнала, который воздействовал на нелинейный элемент, модулируя при этом СВЧ-сигнал, переотраженный на второй гармонике. Низкочастотная составляющая регистрировалась СВЧ-приемником П5-4Б.

В последующем к выходу приемника был подключен усилитель НЧ, а к его выходу – динамический громкоговоритель, преобразующий НЧ-сигнал в речевую информацию. Нелинейный рассеиватель с подключенным к его нелинейному элементу микрофоном был перенесен из помещения измерительного стенда за дверь на расстояние 5 м от антенн (рис. 1). При облучении электромагнитного отражателя через дверь и перегородку обеспечивался дистанционный съем речевой информации, воспринимаемой микрофоном.

Таким образом, в результате экспериментов подтверждается принципиальная возможность применения нелинейно-параметрической радиолокации для дистанционного обнаружения и идентификации не только мин, но и специальных технических средств негласного съема информации, содержащих акустические электронные датчики цели (микрофоны), а также для перехвата речевой информации.

Литература

1. **Анцелевич М.А.** Идентификация инженерных мин с широкой зоной поражения. – М.: ВИУ, 1999.

2. **Щербаков Г.Н.** Обнаружение объектов в укрывающих средах. – М.: Арбат информ., 1998.

Статья поступила 26.07.2002 г.

УДК 511.2

© 2002, В. П. Голиков

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕТА ЭРАТОСФЕНА

Устанавливается аналитическая зависимость между двумя последовательностями чисел вида 1, 2, ..., $p_1p_2...p_k$ и 1, 2, ..., $p_1p_2...p_kp_{k+1}$, в которых удалены числа, кратные всем простым числам по p_k включительно. Приводится формула для количества простых чисел, содержащихся в натуральном n, если заранее известны все простые числа вплоть до $p_{\max} \le \sqrt{n}$. Предлагаются алгоритм и две рекуррентные формулы для построения последовательностей простых чисел.

1. Введение

Детальный анализ и аналитическая форма решета Эратосфена приведены в [1]. Основная цель указанной статьи состояла в выводе рекуррентных формул для вычисления $i+1$-го простого числа. В приводимых двух рекуррентных формулах используются специальные табличные функции, отражающие в двух системах подсчета количество кратных некоторому простому числу составных чисел, предшествующих другим числам последовательностей.

С позиции алгоритма вычисления больших массивов простых чисел недостатком первой рекуррентной формулы является значительный объем вычислений, а второй – лежащее в ее основе недоказанное допущение, что между квадратом двух соседних простых чисел имеется хотя бы одно простое число. Основные вычислительные процедуры построены по принципу движения от наиболее разреженных к наименее разреженным по кратным некоторым p_i числам последовательностям.

В настоящей статье предложены алгоритмы и рекуррентные формулы для вычисления последовательностей простых чисел, при этом они построены на обратном принципе: движение осуществляется от наименее разреженных по числам кратным простым числам последовательностей к наиболее разреженным, причем в рамках только первых «ячеек» [1]. С точки зрения алгоритма вычисления последовательности простых чисел необходимость в табличных целочисленных функциях здесь вообще отпадает. По сравнению с классическим решетом Эратосфена предложенный алгоритм имеет то преимущество, что изначально

Голиков Василий Петрович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник 4 ЦНИИ Министерства обороны

он оперирует не натуральным, а прореженным относительно некоторых чисел натуральным рядом и вместо отсчетного шага в «единицу» используется «m»-шаг, где $m > 1$.

При использовании рекуррентных формул порядковые номера соответствующих составных чисел в последовательностях вычисляются не по табличным функциям, а по предложенным формулам.

Выведена формула для количества простых чисел, содержащихся в числе n, если известны все простые числа включительно по $p_{\max} \le \sqrt{n}$.

Решаются задачи двух типов: вычисление всех простых чисел, не превосходящих число n, и вычисление заданного числа простых чисел.

2. Обозначения и определения

По причине акцентов настоящей статьи использование символов и определений, приведенных в [1], излишне громоздко. Поэтому были введены собственная символика и терминология.

Простое i-е число обозначается через p_i, а $N_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$. Множество целых чисел от 1 до N_k обозначается через $D_k^{(0)}$. Число элементов этого множества равно N_k.

Пусть $k \ge 1$. Подмножество чисел из $D_k^{(0)}$, каждое из которых делится на p_1, назовем *отсевом* числа p_1 (первым отсевом) и обозначим его через $C_k^{(1)}$. $C_k^{(1)} = \{c_{k,j}^{(1)}\}$, где $c_{k,j}^{(1)}$ – элемент отсева, j – порядковый номер элемента отсева в $C_k^{(1)}$. Далее считаем, что каждый последующий отсев $C_k^{(i)}$ не содержит чисел, присутствующих в предыдущих отсевах, т. е. все отсевы являются «изолированными» друг от друга. Поэтому первым элементом любого отсева является число p_i, а вторым – p_i^2.

Из самого определения следует, что последний отсев в $D_k^{(0)}$ образуется простым числом $p_{\max} \le \sqrt{N_k}$. Подмножество чисел $D_k^{(i)}$, оставшихся после удаления из $D_k^{(0)}$ элементов $C_k^{(i)}$, т.е. $D_k^{(i)} = D_k^0 \setminus C_k^{(i)}$ назовем *просевом* числа p_i (i-м просевом), при этом $D_k^{(i)} = \{d_{k,l}^{(i)}\}$, где $d_{k,l}^{(i)}$ – элемент просева, l – его порядковый номер в $D_k^{(i)}$.

В случае, когда в $D_k^{(0)}$ порядковый номер отсева (просева) $i \le k$, будем говорить, что отсев (просев) является *собственным*, в противном случае ($i > k$) – *несобственным*.

Объединение элементов первых i отсевов далее обозначаем через $C_k^{(\Sigma i)}$. Просев, полученный из $D_k^{(0)}$ путем удаления элементов $C_k^{(\Sigma i)}$, обозначим через $D_k^{(\Sigma i)}$. Просев $D_k^{(\Sigma k)}$ назовем *полным просевом* и далее обозначим его в виде D_k. Соответственно просев $D_k^{(\Sigma k-1)}$ назовем *предполным просевом*.

Очевидно, что первые элементы всех собственных и несобственных отсевов вместе с оставшимися элементами просева, исключая единицу, образуют в $D_k^{(0)}$ решето Эратосфена.

3. Основное свойство просевов

Сформулируем в виде теоремы важное для дальнейших построений свойство просевов. Хотя в [1] и присутствуют предпосылки для доказательства этого свойства, само оно в указанной статье не сформулировано и не используется.

Обозначим через L_k множество чисел вида

$$L_K = N_k \cdot \varphi,$$

где $\varphi = \overline{1,(p_{k+1}-1)}$, и назовем его базовым множеством или базой L_k.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Множество чисел Q_k, включающее элементы полного просева D_k, а также числа, полученные суммированием каждого числа просева D_k с каждым числом базы L_k, являются предполным просевом $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$.

Доказательство. Каждое число, входящее в L_k, по определению равно или больше N_k, но строго меньше числа N_{k+1}, то есть является элементом множества $D_{k+1}^{(0)}$. Поскольку каждый из элементов полного просева D_k меньше числа N_k и не делится ни на одно из простых чисел, входящих в N_k, то любой элемент множества Q_k, представляющий собой сумму некоторого числа базы L_k с числом из Q_k, также не делится ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots p_k$. Следовательно, дополнением к множеству Q_k в $D_{k+1}^{(0)}$ является множество чисел, каждое из которых делится хотя бы на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots p_k$.

Если предположить, что множество Q_k полно, то есть $D_{k+1}^{(0)}$ не содержит других элементов со свойством элементов Q_k, то таким дополнением является просев $C_{k+1}^{(\Sigma k)}$. А поскольку множества Q_k и $C_{k+1}^{(\Sigma k)}$ вместе образуют множество $D_{k+1}^{(0)}$, то $Q_k = D_{k+1}^{(\Sigma k)}$, то есть Q_k является $k+1$-м предполным просевом.

Для доказательства полноты множества Q_k необходимо подсчитать количество элементов множеств $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$ и Q_k. Количество элементов предполного просева $D_{k+1}^{(\Sigma k)}\left(N_{(k+1)d}^{(\Sigma k)}\right)$ равно сумме двух чисел: числа элементов полного просева $D_{k+1}\left(N_{(k+1)d}\right)$ и числа элементов отсева $C_{k+1}^{(k+1)}\left(N_{(k+1)c}^{(k+1)}\right)$.

Формулы для числа элементов отсева, предполного и полного просева, выведенные с использованием функции Мёбиуса, приведены в [1]. Мы же указанные формулы выведем на основе логико-вероятностного (точнее, булево-частотного) подхода, который позволит получить принципиально новый результат – формулу для количества простых чисел, содержащихся в натуральном n.

Обозначим через f величину, обратную значению p_i:

$$f_i = \frac{1}{p_i} \qquad (1)$$

и назовем ее *частотой* обращения к числу кратному p_i в $D_k^{(0)}$. Пусть булева переменная A_i обозначает событие, заключающееся в том, что при последовательном (или случайном) просмотре всех элементов множества $D_k^{(0)}$ произойдет обращение к элементу отсева $C_k^{(i)}$. Логическое условие обращения хотя бы к одному элементу полного отсева $C_k(F_{kc}(A))$ имеет вид:

$$F_{kc}(A) = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k\,, \qquad (2)$$

где «$\vee$» – знак дизъюнкции.

Пользуясь равносильными преобразованиями булевой алгебры, учитывая также, что обращения к элементу полного отсева и полного просева являются противоположными событиями, запишем логическое условие обращения к элементу просева $(F_{kd}(A))$ в следующем виде:

$$F_{kd}(A) = \neg A_1 \mathbin{\&} \neg A_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \neg A_k\,, \qquad (3)$$

где «$\neg$» и «$\&$» – знаки отрицания и конъюнкции соответственно.

Переходя от булевых к частотным переменным, получим численное значение частоты обращения хотя бы к одному элементу полного просева (f_{kd}):

$$f_{kd} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \qquad (4)$$

Преобразовав выражение (4) и учитывая, что число элементов полного просева (N_{kd}) равно:

$$N_{kd} = N_k \cdot f_{kd}\,, \qquad (5)$$

окончательно получим:

$$N_{kd} = \prod_{i=1}^{k} (p_{i-1})\,. \qquad (6)$$

Для вывода развернутой формулы числа элементов полного отсева (N_{kc}) запишем (2) в ортогональной форме:

$$F_{kc}(A) = A_1 \vee \neg A_1 \mathbin{\&} A_2 \vee \ldots \vee$$
$$\vee \neg A_1 \mathbin{\&} \neg A_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \neg A_{k-1} \mathbin{\&} A_k\,. \qquad (7)$$

Переходя к частотным переменным, окончательно получим:

$$N_{kc} = N_k \cdot (f_1 + (1-f_1)\cdot f_2 + (1-f_1)\cdot(1-f_2) f_3 + \ldots +$$
$$+ (1-f_1)\cdot(1-f_2)\ldots(1-f_{k-1})\cdot f_k)\,. \qquad (8)$$

Индивидуальный вклад каждого p_i простого числа в полный отсев $\left(N_{kc}^{(i)}\right)$ в этом случае вычисляется в соответствии с соотношением:

$$N_{kc}^{(i)} = N_k \cdot (1-f_1)\cdot(1-f_2)\ldots(1-f_{i-1}) f_i\,. \qquad (9)$$

Из (8) легко получить, что

$$N_{kc}^{(k)} = N_{(k-1)d}\,. \qquad (10)$$

С учетом (6) и (10) для числа элементов предполного просева имеем:

$$N_{(k+1)d}^{(\Sigma k)} = N_{(k+1)d} + N_{kd} = N_{kd} \cdot p_{k+1}\,. \qquad (11)$$

Поскольку максимальное значение φ равно $p_{k+1} - 1$, то число элементов множества $Q_k(N_{Qk})$ вычисляется в соответствии с формулой:

$$N_{QK} = N_{kd} + N_{kd}(p_{k+1} - 1) = N_{kd} \cdot p_{k+1}\,. \qquad (12)$$

Формулы (11) и (12) в правых частях совпадают. Следовательно, множества Q_k и $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$ совпадают не только по свойствам элементов, но и по их числу. Это означает, что множество Q_k является полным.

Теорема доказана.

Построим для примера множество элементов Q_3 (просев $D_4^{(\Sigma 3)}$) из полного просева D_3 и базы L_3 в виде массива, состоящего из семи строк (массив (13)).

	φ=0	1	$\dot{7}$	11	13	17	19	23	29	
	φ=1	31	37	41	43	47	$\dot{49}$	53	59	
	φ=2	61	67	71	73	$\dot{77}$	79	83	89	
Q_3:	φ=3	$\dot{91}$	97	101	103	107	109	113	$\dot{119}$	(13)
	φ=4	$\ddot{121}$	127	131	$\dot{133}$	137	139	$\ddot{143}$	149	
	φ=5	151	157	$\dot{161}$	163	167	$\dddot{169}$	173	179	
	φ=6	181	$\ddot{187}$	191	193	197	199	$\dot{203}$	$\dot{209}$	

Слева в массиве (13) приведено значение параметра φ базы L_3. Поскольку в верхней строке находится исходный полный просев D_3, то значение $\varphi = 0$. Для второй строки значение $\varphi = 1$, поэтому к элементам первой строки массива добавлено число $2\cdot3\cdot5\cdot1 = 30$. И так далее – вплоть до седьмой строки, в которой $\varphi = p_4 - 1 = 7 - 1 = 6$, в итоге к элементам последней строки добавлено число $2\cdot3\cdot5\cdot6 = 180$.

Для получения полного просева D_4 необходимо из массива (13) удалить элементы отсева $C_4^{(4)}$, помеченные одной точкой. Исходя из самого определения отсева и соотношения (10), эти элементы получаются путем умножения второго элемента верхней строки ($p_4 = 7$) на все без исключения элементы этой же строки. При этом считаем, что второй элемент отсева $C_k^{(k)}$, всегда являющийся простым числом, не уничтожается (не стирается), а относится к множеству R , называемому далее *накопителем* простых чисел.

Если нет необходимости строить последующие полные просевы, а требуется получить решето, то из массива (13) удаляется единица, а также элементы несобственных отсевов $C_4^{(5)}$ и $C_4^{(6)}$, помеченные двумя и тремя точками. Эти элементы получаются из исходных чисел p_5 и p_6 по тому же правилу, что и элементы $C_4^{(4)}$, с той лишь разницей, что произведение чисел не должно превосходить величины N_4 ($2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$). При этом числа p_5 и p_6 также относятся к множеству R.

4. Алгоритм вычисления последовательности простых чисел и оценка его сложности

Поставим задачу вычислить с использованием свойства просевов все простые числа, не превосходящие вначале число N_k , а затем – произвольное n . Прежде всего заметим, что операцию суммирования, присутствующую в формулировке теоремы, удобнее рассматривать как прибавление одного и того же числа базы $p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$ к числам каждой уже сформированной предыдущей последовательности. В этом случае максимальное число вычисляемых последовательностей равно: $\varphi_{\max} = p_{k+1} - 1$.

Для запуска алгоритма необходимо знать числа первого полного просева и первое значение $\varphi_{\max}$. Поэтому считаем известными $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. После занесения $p_1 = 2$ в накопитель получаем, что $D_1 : 1$ и $\varphi_{\max} = p_2 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Кратко основные операции алгоритма сводятся к следующим:

1. Принимается $D_1 : 1$, $N_1 = p_1 = 2$ и $\varphi_{\max} = 2$.

2. Формируется вторая (очередная) строка предполного просева $D_2^1\left(D_{k+1}^{(\Sigma k)}\right)$ путем суммирования первой строки исходного полного просева $D_1(D_k)$ и числа $N_1(N_k)$.

3. Число сформированных строк равно $\varphi_{\max}$? Нет – п. 2. Да.

4. Вычисляются числа отсева $C_2^2\left(C_{k+1}^{(k+1)}\right)$ путем перемножения второго элемента первой строки сформированного просева на все элементы этой же строки.

5. Второе число первой строки помещается в накопитель.

6. Формируется полный просев $D_2(D_{k+1})$ путем удаления из предполного просева элементов отсева $C_2^2\left(C_{k+1}^{(k+1)}\right)$.

7. Вычисляется величина граничного значения

$$b = \sqrt{N_k} ,$$

где $b \ge p_{\max}$.

8. Сравнивается значение второго элемента полного просева $d_{2,2}(d_{k+1,2})$ со значением « b ». $d_{2,2}(d_{k+1,2}) \ge b$? Да – п. 12. Нет.

9. Вычисляются числа первого (очередного) несобственного отсева путем перемножения второго элемента полного (несобственного) просева на элементы его первой строки с тем условием, чтобы произведение не превосходило N_k .

10. Первый элемент несобственного отсева помещается в накопитель, остальные удаляются из просева.

11. Сравнивается значение второго элемента несобственного просева $d_{k+1,2}^{(\Sigma k+\alpha+1)}$, где α – порядковый номер несобственного отсева, со значением « b ». $d_{k+1,2}^{(\Sigma k+\alpha+1)} \ge b$? Нет – п. 9. Да.

12. Конец вычислений.

Оставшиеся числа (исключая 1) и числа накопителя составляют решение задачи.

Для произвольного n $(n \ne N_k)$ алгоритм вычисления простых чисел отличается в основном тем, что удаление элементов несобственных отсевов начинается лишь в просеве D_{k+1}, где k находится из условия $N_k < n < N_{k+1}$. Указанные элементы удаляются до n включительно.

Установим аналитическую зависимость между количеством простых чисел, заключенных в числе $N_k\left(\pi\left(N_k\right)\right)$, которое считаем известным, и количеством необходимых операций суммирования и умножения для их вычисления $\left(N\left(N_k\right)\right)$.

Предполный просев $D_k^{(\Sigma k-1)}$ содержит $N_{(k-1)d} \cdot p_k$ элементов, включающих единицу, составные числа, а также все простые числа последовательности $D_k^{(0)}$, за исключением $k-1$ простых чисел, отнесенных к накопителю. Поскольку каждое составное число предполного просева является элементом отсева $C_k^{(k)}$ или несобственного отсева, полученного как произведение двух чисел, количество операций умножения в этом просеве равно $N_{(k+1)d} \cdot p_k - 1 - \left(\pi\left(N_k\right) - (k-1)\right)$. Количество операций суммирования числа $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$ к другим числам в k-м предполном просеве равно N_{kd} . Общее число операций для каждого i-го предполного просева $(i < k)$ складывается из операции умножения по образованию элементов $C_k^{(k)}$ и операций суммирования при образовании просева. Общее количество операций здесь равно $N_{(i-2)d} \cdot p_{(i-1)} - 1$. Для $i \le 2$ общее количество операций суммирования равно двум.

Количество операций по образованию произведений чисел $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$, участвующих в суммировании, равно $k-2$. И, наконец, общее количество операций суммирования счетчика параметра φ равно $\sum_{j=3}^{k+1}\left(p_j - 1\right) + 2$. Суммируя перечисленные выше слагаемые и произведя необходимые преобразования, окончательно получим:

$$N(N_k) = N_{(k+1)d} \cdot (2p_k - 1) +$$
$$+ \sum_{i=4}^{k} \left(N_{(i-2)d} \cdot p_{i-1} - 1\right) - \pi(N_k) + 2\ k + \sum_{J=3}^{K+1} (P_J - 1), \quad (14)$$

где $k \geq 3$.

Подсчеты по формуле (14) показывают, что общее количество арифметических операций суммирования и умножения, приходящихся на одно вычисленное простое число, при изменении исходного числа n от $N_3 = 30$ до $N_{11} = 200560490130$ изменяется от 1,8 до 6,9.

Сравним количество арифметических операций предложенного алгоритма с количеством операций классического алгоритма Эратосфена. Основными процедурами последнего являются: формирование натурального ряда чисел, начиная с 2, и зачеркивание (но не удаление) чисел, кратных простым числам. Общее количество операций суммирования (добавления единицы) при формировании натурального ряда составляет $n-2$. При зачеркивании чисел, начиная с числа p_i, производится подсчет количества чисел последовательности (операций суммирования), и каждое число, равное p_i, кроме самого первого простого числа, зачеркивается. Зачеркнутое число принимается за нуль, и подсчет продолжается. Операцию по подсчету и зачеркиванию чисел последовательности принимаем за одну операцию «обращения» к числу («счетчику»), эквивалентной операции суммирования. Поскольку зачеркивание каждого числа, кратного p_i, целесообразно начинать с квадрата этого числа [2], то общее количество операций обращения применительно к одному числу p_i будет равно $n - p_i^2$. Количество операций умножения (возведения p_i в квадрат) равно числу простых чисел, последнее из которых $p_j \leq \sqrt{n}$.

Операции сравнения, присутствующие в обоих алгоритмах, не учитываются. Количество арифметических операций, необходимых для вычисления всех простых чисел, содержащихся в числах n, равных 6, 30, 210 и 2310, с помощью указанных алгоритмов приведено в табл. 1.

Таблица 1

№ п/п	Тип операции	Количество арифметических операций для $n = \{6, 30, 210, 2310\}$							
		Алгоритм Эратосфена				Предлагаемый алгоритм			
		6	30	210	2310	6	30	210	2310
1	Суммирование	4	28	208	2308	2	10	58	538
2	Обращение (счетчик)	2	52	883	24184	2	6	12	22
3	Умножение	1	3	6	15	0	2	15	199
Общее количество операций		7	83	1097	26407	4	18	85	759

Из табл. 1 видно, что при формировании простых чисел уже при $n = 2310$ предложенный алгоритм содержит более чем в 30 раз меньше арифметических операций, чем алгоритм Эратосфена. Основные причины такого преимущества состоят в использовании вместо натурального ряда прореженной по начальным простым числам последовательности и замены операций пошагового зачеркивания чисел операциями перемножения двух чисел с последующим удалением из последовательности полученного произведения.

Заметим, что если построены все элементы полного просева D_k, то использование предложенного алгоритма позволяет, не вычисляя в явном виде все простые числа, содержащиеся в $D_{\kappa+1}$, определить их количество. Действительно, количество элементов $D_{\kappa+1}^{(\Sigma k)}$ вычисляется в соответствии с (11), а все удаляемые элементы образуются из D_k, являющегося верхней строкой просева $D_{\kappa+1}^{(\Sigma k)}$, и их количество можно вычислить в явном виде.

Для того чтобы решить задачу построения заданного количества простых чисел с использованием свойства просевов, необходимо располагать формулой количества простых чисел в N_k.

5. Формула для количества простых чисел, содержащихся в *n*

Пусть для натурального n известны все простые числа по p_e включительно, причем значение p_l равно $p_{\max}$ и определяется из условия:

$$(p_l = \sqrt{n}) \vee (p_l < \sqrt{n}\ \&\ p_{l+1} > \sqrt{n}) \to (p_l = p_{\max})\,.(15)$$

Выведем формулу количества простых чисел в n $(\pi(n))$. Для этого обратимся к выражению (8). Сомножитель N_k в нем вынесен за скобки по той причине, что он нацело делится на любое f_i, заключенное в скобки. Пусть в (8) вместо N_k стоит любое натуральное $n > 1$. Продолжим в скобках выражения (8) ортогонализацию его членов вплоть до указанного выше значения $p_l\left(f_i = \dfrac{1}{p_l}\right)$ и, раскрывая внутренние скобки, перемножим все имеющиеся там сомножители. В результате внутри внешних скобок получим аналитическое выражение, в точности соответствующее формуле вероятности суммы l событий, выраженной в переменных f_l. Раскрывая внешние скобки, перемножая каждый член полученного выражения на n и взяв целую часть каждого произведения, получим с учетом (1) формулу для числа членов всех отсевов из n $\left(N_c^{(\Sigma l)}(n)\right)$:

$$N_c^{(\Sigma l)}(n) = \sum_{i=1}^{l}\left[\frac{n}{p_i}\right] - \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=i+1}^{l}\left[\frac{n}{p_i \cdot p_j}\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-2}\sum_{j=i+1}^{l-1}\sum_{k=j+1}^{l}\left[\frac{n}{p_i \cdot p_j \cdot p_k}\right] - \ldots + (-1)^{l-1}\left[n \Big/ \prod_{i=1}^{l} p_i\right], (16)$$

где $[\quad]$ – целая часть числа.

Учитывая, что каждый отсев начинается с простого числа и отбросив 1 в последовательности n, получим формулу для количества простых чисел в n:

$$\pi(n) = n - N_c^{(\Sigma l)}(n) + l - 1\,. \tag{17}$$

Теоретически в формуле (16) содержится $2^l - 1$ членов, однако с увеличением n их количество становится значительно меньше этого числа. Это связано с тем, что произведение простых чисел, стоящее в знаменателе, растет быстрее, чем само n, поэтому с некоторого момента вначале отдельные члены (16), а потом и все обращаются в нуль и могут не учитываться.

Формула (16) используется также для подсчета числа членов отсевов при $k < l$. Именно наличие такой формулы позволяет отказаться от табличных целочисленных функций [1] и снять все вопросы чисто аналитического построения рекуррентных формул простых чисел.

При практических вычислениях простые числа, являющиеся в (16) делителями n, могут группироваться и вычисляться по более компактным формулам типа (4) и с учетом очевидного соотношения: $f_{kc} = 1 - f_{kd}$.

Вычислим, например, количество простых чисел, предшествующих p_5^2, т.е. $n = 11^2 - 1 = 120$. Поскольку число $n = 120$ делится на 2, 3 и 5, а числом $p_l \le \sqrt{120}$ является $P_4 = 7$, то слагаемые формулы для $N_s^{(\Sigma l)}(n)$ в этом случае следующие:

$$N_c^{(\Sigma l)}(120) = \frac{120}{2\cdot3\cdot5}(2\cdot3\cdot5 -$$
$$-(2-1)(3-1)(5-1)) + \left[\frac{120}{7}\right] - \left[\frac{120}{2\cdot7}\right] - \left[\frac{120}{3\cdot7}\right] - \left[\frac{120}{5\cdot7}\right] +$$
$$+\left[\frac{120}{2\cdot3\cdot7}\right] + \left[\frac{120}{2\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{120}{3\cdot5\cdot7}\right] - \left[\frac{120}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] =$$
$$= 88 + 17 - 8 - 5 - 3 + 2 + 1 + 1 - 0 = 93.$$

Поскольку $l = 4$, то:

$$\pi(120) = 120 - 93 + 4 - 1 = 30\,.$$

При решении задачи алгоритмического построения заданного количества простых чисел необходимо после формирования каждого полного просева D_k вычислять значение $\pi(N_k)$. И только после выполнения требуемого условия проводить удаление элементов несобственных отсевов в соответствии с операциями раздела 4 данной статьи вплоть до получения необходимого массива простых чисел.

Представляет определенный теоретический интерес перевод вышеприведенных алгоритмов на язык формул.

6. Первая рекуррентная формула для последовательностей простых чисел

Зная, что в полном просеве D_k все числа между единицей и квадратом его второго числа являются простыми, и применив утверждение теоремы, запишем формулу для этих чисел вначале с использованием знака неравенства. Обозначим через r_i i-й элемент накопителя ($r_i \in R$). Постулируем далее значения r_1 и r_2 элементов полного просева D_2:

$$r_1 = 2,\ r_2 = 3, \tag{18}$$

а также

$$d_{2,1} = 1,\ d_{2,2} = 5. \tag{19}$$

Считая, что $k \ge 2$, формулу для $k+1$-й последовательности простых чисел $(P(k+1))$ запишем в виде системы (конъюнкции) соотношений, чтобы удобнее было их комментировать.

$$P(k+1):\qquad r_{k+1} = d_{k,2}\,, \tag{20}$$

$$d_{k+1,i}^{(\Sigma k)} = d_{k,l} + \varphi\prod_{\chi=1}^{k} r_\chi\,, \tag{21}$$

где $$1 \le l \le \prod_{\beta=1}^{k}(r_\beta - 1), \tag{22}$$

$$0 \le \varphi \le r_{k+1} - 1, \tag{23}$$

$$i = l + \varphi\cdot l_{\max}\,. \tag{24}$$

$$c_{k+1,m}^{(k+1)} = r_{k+1}\cdot d_{k,m}\,, \tag{25}$$

где $$1 \le m \le \prod_{\gamma=1}^{k}(r_\gamma - 1). \tag{26}$$

$$\forall d_{k+1,\xi}\,(d_{k+1,\xi} = d_{k+1,i}^{(\Sigma k)}\ \&\ d_{k+1,\xi} \ne c_{k+1,m}^{(k+1)}), \tag{27}$$

где $$1 \le \xi \le \prod_{\eta=1}^{k+1}(r_\eta - 1). \tag{28}$$

$$\forall r_j[r_j \equiv p]\ \&\ d_{k+1,\xi}\,(d_{k+1,\xi} > d_{k+1,1}\ \&$$
$$\&\ d_{k+1,\xi} < (d_{k+1,2})^2)[d_{k+1,\xi} = p], \tag{29}$$

где $1 \le j \le k+1$. (30)

Соотношение (20) определяет очередной (а для каждого этапа вычислений – последний) элемент накопителя.

Выражение (21) представляет собой рекуррентную формулу для вычисления элементов предполного просева $D_{\kappa+1}^{(\Sigma\kappa)}$ и является основным соотношением системы. Считаем, что суммирование в (21) осуществляется вначале последовательно по всем значениям l при первом фиксированном значении φ, затем опять по всем значениям l при втором значении φ и т.д.

Соотношение (22), (23), (26), (28), (30) определяет приделы изменения соответствующих индексов.

Формула (24) определяет значение индекса i – порядкового номера элемента предполного просева $D_{\kappa+1}^{(\Sigma\kappa)}$ и численно равно порядковому номеру пары индексов $l-\varphi$, полученному как результат прямого произведения множеств индексов l и φ и принимаемых значения

$$1-0, 2-0, ..., l_{\max}-0, ..., 1-1,\ l_{\max}-\varphi_{\max}\,.$$

Выражение (25) является формулой построения элементов отсева $C_{k+1}^{(k+1)}$, причем элементы $d_{k,m}$ являются результатом вычислений на предыдущем цикле.

Предикат (27) содержит знак неравенства и определяет элементы полного просева $D_{\kappa+1}$, причем относит к ним лишь те элементы предполного просева $D_{\kappa+1}^{(\Sigma\kappa)}$, которые не являются элементами отсева $C_{k+1}^{(k+1)}$.

И, наконец, предикат (29) определяет $k+1$-ю последовательность простых чисел, включающую числа накопителя и все числа, которые больше единицы и меньше квадрата второго числа полного просева $D_{\kappa+1}$.

Вычислим, например, третью последовательность простых чисел. Обратившись к (22) и (23), имеем:

$l_{max} = (r_1-1)(r_2-1) = (2-1)(3-1) = 2$; $\varphi_{\max} = 5-1 = 4$.

Следовательно, $l = \overline{1,2}, \varphi = \overline{0,4}$.

Далее, используя (21) и (24) для $l = \overline{1,2}$, при $\varphi = 0$, имеем $i=1$ и 2. Следовательно, $d_{3,1}^{(\Sigma 2)} = 1+0\cdot 2\cdot 3 = 1$; $d_{3,2}^{(\Sigma 2)} = 5+0\cdot 2\cdot 3 = 5$. Используя другие значения φ, получим значения очередных восьми элементов предполного просева:

$$d_{3,3}^{(\Sigma 2)} = 7;\ d_{3,4}^{(\Sigma 2)} = 11;\ d_{3,5}^{(\Sigma 2)} = 13;$$

$$d_{3,6}^{(\Sigma 2)} = 17; d_{3,7}^{(\Sigma 2)} = 19; d_{3,8}^{(\Sigma 2)} = 23; d_{3,9}^{(\Sigma 2)} = 25; d_{3,10}^{(\Sigma 2)} = 29.$$

Далее, воспользовавшись (25) и (26), получим: $m = \overline{1,2}$ и $c_{3,1}^{(3)} = 5\cdot 1 = 5$; $c_{3,2}^{(3)} = 5\cdot 5 = 25$. Обратившись к (28), находим, что $\xi = \overline{1,8}$. В соответствии с предикатом (27) элементы полного просева $d_{3,5}$ численно равны элементам предполного просева, за исключением элементов последнего изолированного отсева, т.е. ранее вычисленных чисел 5 и 25. В результате получим последовательность из восьми чисел, приведенных в верхней строке массива (13). При этом индекс ξ дает новые порядковые номера элементам $D_3^{(\Sigma 2)}$, и после удаления элементов $C_3^{(3)}$ вторым элементом в полном просеве вместо $d_{3,2}^{(\Sigma 2)} = 5$ становится число $d_{3,2} = 7$.

Наконец, воспользовавшись предикатом (29), находим, что простыми являются первые три числа накопителя (2, 3 и 5), а также все числа полного просева, расположенные между 1 и числом 7^2, т.е. числа 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29.

При записи формулы в виде соотношений (20)–(30) подразумевается, что при ее использовании предикат (27), содержащий знак неравенства, реализуется путем изъятия элементов отсева $C_{k+1}^{(k+1)}$ из предполного просева $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$ и сквозной перенумерацией оставшихся членов в рамках полного просева $D_{\kappa+1}$. Такая алгоритмическая процедура не отвечает в явном виде на главный вопрос: сколько и какие простые числа, содержатся в просеве $D_{\kappa+1}$ между 1 и его элементом $\left(d_{\kappa+1}\right)^2$, объявленные предикатом (29).

Для ответа на данный вопрос в аналитической форме введем двухпозиционный номер элемента отсева. Обозначим через $i_m^{(c)}$ номер элемента отсева $c_{(k+1),m}^{(k+1)}$ (вычисляемого по (25)), где c – признак отсева, значение i выбирается из (24) и означает сквозной порядковый номер элемента отсева $c_{(k+1),m}^{(k+1)}$ в совокупности элементов $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$, а нижний индекс m соответствует порядковому номеру этого же элемента в отсеве $C_{(k+1)}^{(k+1)}$ в рамках (26). Поскольку значение $c_{(k+1),m}^{(k+1)}$, а также первые k простых чисел накопителя известны, то само значение i вычисляется по формуле:

$$i_m^{(c)} = c_{(k+1),m}^{(k+1)} - N_c^{(\Sigma k)}(c_{(k+1),m}^{(k+1)}), \tag{31}$$

где $N_c^{(\Sigma k)}(c_{(k+1),m}^{(k+1)})$ равно числу элементов всех отсевов по k-й включительно относительно числа $c_{(k+1),m}^{(k+1)}$ и определяется в соответствии с формулой (16).

Проведем перенумерацию всех оставшихся порядковых номеров i элементов $d_{(k+1),i}^{(\Sigma k)}$ путем уменьшения их значения на число предшествующих каждому i-му номеру номеров $i_m^{(c)}$. Число номеров $i_m^{(c)}$ в точности равно значению индекса m при $i_m^{(c)}$, то есть $m = m\left(i_m^{(c)}\right)$. Поэтому новое значение номера $i(i_1)$ каждого элемента (теперь уже D_{k+1}) в этом случае будет равно:

$$i_1 = i - m(i_m^{(c)}). \tag{32}$$

Используя (24), (26) и (28), легко установить, что $i_{1\max} = \xi_{\max}$. Поэтому перенумерация элементов просева $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$ при переводе последнего в полный просев D_{k+1} производится в соответствии с соотношением:

$$d_{k+1,i_1} = d_{k+1,i}^{(\Sigma k)}. \tag{33}$$

Обозначим через i_1^0 число элементов d_{k+1,i_1}, предшествующих числу $(d_{k+1,2})^2$ в предикате (29). Значение i_1^0 вычисляется по формуле:

$$i_1^0 = \left(d_{k+1,2}\right)^2 - N_c^{(\Sigma k)}\left(\left(d_{k+1,2}\right)^2 - 1\right) - 1, \tag{34}$$

где $N_c^{(\Sigma k)}\left(\left(d_{k+1,2}\right)^2 - 1\right)$ определяется в соответствии с (16).

Обозначив через p_j j-е простое число, в конечном счете получим последовательность всех простых чисел, не превосходящих $(d_{k+1,2})^2$:

$$p_j = r_j, \text{ для } j = \overline{1, k+1}; \tag{35}$$

$$p_j = p_{i_1+k} = d_{k+1,\,i_1}, \text{ для } j > k+1,\ i_1 = \overline{2, i_1^0}. \tag{36}$$

Таким образом, в чисто аналитическом виде первую рекуррентную формулу составляют соотношения (20)–(26), (16), (28), (31)–(36).

Приведем пример использования формулы. Вычислим последовательность простых чисел $P(4)$, т.е. все простые числа вплоть до числа $p_5 = 11^2$ в просеве D_4.

В этом случае известны элементы накопителя ($r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$) и элементы $d_{3,\mathrm{m}}$ просева D_3 (верхняя строка массива (13)). Используя (20), имеем $r_4 = d_{3,2} = 7$. Применяя далее соотношения (21)–(24), построим предполный просев $D_4^{\Sigma 3}$ (массив 13), а (25) и (26) –

отсев $C_4^{(4)}$ (числа массива (13), помеченные одной точкой).

Поскольку первый элемент отсева $c_{k,1}^{(k)}$ всегда имеет второй порядковый номер в предполном просеве $D_4^{\Sigma 3}$ (i_1=2_1), то вычисление значения $i_m^{(c)}$ начнем с $c_{4,2}^{(4)}$. Для этого, используя формулу (16), вычислим вначале значение $N_c^{\Sigma 3}(c_{4,m}^4)$, а затем по формуле (31) – само значение $i_m^{(c)}$. Проведя вычисления, получим:

$i_2^{(c)} = 49 - 35 = 14_2$; $i_3^{(c)} = 77 - 56 = 21_3$; $i_4^{(c)} = 91 -$ $-66 = 25_4$; $i_5^{(c)} = 119 - 87 = 32_5$; $i_6^{(c)} = 133 - 97 = 36_6$;

$i_7^{(c)} = 161 - 118 = 43_7$; $i_8^{(c)} = 203 - 148 = 55_8$.

Вычислив по (28) пределы значения ξ, изменив порядковую нумерацию элементов $D_4^{\Sigma 3}$ (за исключением номеров $i_m^{(c)}$) по соотношению (32) и воспользовавшись (33), получим элементы полного просева D_4. Используя формулы (16) и (34), вычислим далее значение i_1^0. Имеем:

$i_1^0 = 121 - 93 - 1 = 27$.

Окончательно воспользовавшись (35) и (36), получим $P(4)$:
$p_1 = r_1 = 2$; $p_2 = r_2 = 3$; $p_3 = r_3 = 5$; $p_4 = r_4 = 7$; $p_5 = d_{4,2} =$ $=11$; $p_6 = d_{4,3} = 13$ и т.д. вплоть до $p_{30} = d_{4,27} = 113$.

Заметим, что первая рекуррентная формула в [1] в рамках используемой здесь терминологии позволяет, по существу, вычислить r_{k+1}-е число накопителя, а вторая – простое число, следующие за элементом $(d_{k+1,2}^{(\Sigma k)})^2$ при допущении, что между указанным элементом и элементом $(d_{k+1,3}^{(\Sigma k)})^2$ существует хотя бы одно простое число. Приведенная здесь рекуррентная формула свободна от указанного допущения, поскольку позволяет вычислить все простые числа вплоть до $(d_{k+1,3}^{(\Sigma k)})^2$ без обращения к табличным функциям. Если ставится задача вычислить n-е простое число, то необходимо ответить на вопрос: достигнуто ли это число в рамках формируемого предполного просева $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$ или нет? Поскольку известны числа накопителя, а также простые числа $d_{k+1,2}^{(\Sigma k)}$ и $d_{k+1,3}^{(\Sigma k)}$, то, вычислив количество простых чисел в числе $(d_{k+1,3}^{(\Sigma k)})^2 - 1$ с использованием формул (16) и (17), получим однозначный ответ. При отрицательном исходе вычисления необходимо продолжать действия до выполнения требуемого условия. Признаком решения задачи является выполнение условия:

$n = i_1 + k + 1$,

где i_1 – порядковый номер простого числа в просеве D_{k+1}, вычисленный по формуле (32).

7. Вторая рекуррентная формула для последовательностей простых чисел

Недостатком первой рекуррентной формулы является то, что при формировании простых чисел в рамках предполного просева $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$ в расчет берутся лишь простые числа, не превосходящие число $(d_{k+1})^2$. А поскольку с увеличением k квадрат указанного числа намного меньше последнего числа предполного просева (оно равно $N_{k+1} - 1$), то налицо избыточность вычислений. Поставим задачу построить вторую рекуррентную формулу, позволяющую вычислять все простые числа, содержащиеся в предполном просеве $D_{k+1}^{(\Sigma k)}$.

Как следует из раздела 4 для решения этой задачи необходимо вычислить и удалить составные числа всех несобственных отсевов вплоть до выполнения условия (15). В этом случае формулы предыдущего параграфа сохраняют свою силу и используются для вычисления чисел полного просева D_{k+1}.

В рамках просева D_{k+1} последующие числа накопителя являются первыми элементами несобственных отсевов, поэтому используется соотношение:

$$r_{k+1+\alpha} = d_{k+1,\,2}^{k+1+\alpha}, \tag{37}$$

где α – порядковый номер несобственного отсева ($\alpha = 1, 2 \ldots$).

Вычисление элементов несобственных отсевов проводится по формуле:

$$c_{k+1,m_\alpha}^{(k+1+\alpha)} = r_{k+1+\alpha} \cdot d_{k+1,\,m_\alpha}^{(\Sigma k+1+\alpha)}, \tag{38}$$

$$1 \le m_\alpha \le N_c^{(k+1+\alpha)}(N_{k+1}), \tag{39}$$

где $N_c^{(k+1+\alpha)}(N_{k+1})$ – количество элементов α-го несобственного отсева, вычисляемого по формуле:

$$N_c^{(k+1+\alpha)}(N_{k+1}) = N_c^{(\Sigma k+1+\alpha)}(N_{k+1}) - N_c^{(\Sigma k+\alpha)}(N_{k+1}). \tag{40}$$

Слагаемые правой части в формуле (40) вычисляются по формуле (16).

Порядковые номера каждого вычисленного элемента α -го несобственного отсева $\left(i_{m_\alpha}^{(c)}\right)$ определяются по соотношению:

$$i_{m_\alpha}^{(c)} = c_{k+1,m_\alpha}^{(k+1+\alpha)} - N_c^{\Sigma(k+\alpha)}\left(c_{k+1,m_\alpha}^{(k+1+\alpha)}\right). \tag{41}$$

Новый номер элемента α -го несобственного просева $\left(i_{\alpha+1}^{d}\right)$ вычисляется по формуле:

$$i_{\alpha+1}^{(d)} = i_\alpha^{(d)} - m_\alpha\left(i_{m_\alpha}^{(c)}\right), \tag{42}$$

где $i_1^{(c)} = 2$, а в качестве номеров $i_1^{(d)}$ элементов просева принимаются их порядковые номера i_1 в полном просеве D_{k+1} в соответствии с (32).

В результате вычислений получаем:

$$d_{k+1,i_{\alpha+1}^{(d)}}^{(\Sigma k+1+\alpha)} = d_{k+1,i_\alpha^{(d)}}^{(\Sigma k+\alpha)}. \tag{43}$$

Проверку на выполнение условия (15) необходимо проводить после каждого акта удаления отсева, начиная с перевода предполного просева в полный. В качестве чисел p_l и p_{l+1} из (15) выступают элементы $r_{k+1+\alpha}$ и $d_{k+1,2}^{(\Sigma k+1+\alpha)}$ соответственно. Поскольку начальные просевы D_1, D_2 и D_3 не содержат несобственных отсевов, то для них $\alpha = 0$. После выполнения условия

(15) все элементы из (43), за исключением 1, а также все числа накопителя являются простыми числами.

Таким образом, вторую рекуррентную формулу образует конъюнкция соотношений (20)–(26), (16), (28), (31)–(43), (15).

Вычислим, например, все простые числа полного просева D_4. Используя массив (13), из которого удален отсев C_4, и принимая $\alpha = 1$, имеем в соответствии с (37): $r_{4+1} = r_5 = d_{4,2}^{4+1} = d_{4,2}^{5} = 11$.

В этом случае:

$N_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$

Воспользовавшись формулами (40) и (16), вычислим число элементов первого несобственного отсева:

$$N_c^{(5)}(210) = N_c^{(\Sigma 5)}(210) - N_c^{(\Sigma 4)}(210) = 167 - 162 = 5.$$

Следовательно, $1 \le m_1 \le 5$. Используя формулу (38), вычислим значения элементов первого несобственного отсева:

$c_{4,1}^{(5)}=11\cdot 1=11$; $c_{4,2}^{(5)}=11\cdot 11=121$; $c_{4,3}^{(5)}=11\cdot 13=143$; $c_{4,4}^{(5)}=11\cdot 17=187$; $c_{4,5}^{(5)}=11\cdot 19=209$.

Далее, используя (40) и (41), определим порядковые номера элементов несобственного отсева $i_{m_\alpha}^{(c)}$.

Имеем:

$i_1^{(c)} = 2_1$; $i_2^{(c)} = 121 - 93 = 28_2$; $i_3^{(c)} = 143 - 110 = 33_3$; $i_4^{(c)} = 187 - 144 = 43_4$; $i_5^{(c)} = 209 - 161 = 48_5$.

Проведем, используя формулу (42), вычисление новых порядковых номеров и перенумерацию элементов D_4, исключая при этом элементы отсева $C_4^{(5)}$. Новые номера $i_2^{(d)}$ следующие: $1_2=1_1$; $2_2=3_1-1$;...; $26_2 = 27_1-1$; $27_2 = 29_1 - 2$; $43_2=47_2-4$. И соответственно $d_{4,1}^{(5)}=d_{4,1}=1$ $d_{4,2}^{(5)}=d_{4,3}=13$;…; $d_{4,26}^{(5)}=d_{4,27}=113$; $d_{4,27}^{(5)}=d_{4,29}=127$;…; $d_{4,43}^{(5)}=d_{4,47}=199$. Поскольку $p_l= r_5 = 11$, а $p_{l+1} = d_{4,2}^{(5)} = 13$ не удовлетворяют условию (15), то необходимо продолжить вычисления. Положив далее $\alpha = 2$ и проведя вычисления, аналогичные вышеприведенным, получим массив (13), из которого удалены все элементы, помеченные сверху точками. Так как $p_l = r_6 = 13$ и $p_{l+1} = d_{4,2}^{(6)} = 17$ удовлетворяют условию (15), то $p_{\max} = 13$ и вычисления при $\alpha = 2$ заканчиваются. Простыми в итоге будут шесть чисел накопителя и оставшиеся числа массива (13) без точек, исключая 1.

Вторая рекуррентная формула в случае ее использования для вычисления всех простых чисел, содержащихся в произвольном числе N (а не в N_k), отличается от вышеприведенной лишь тем, что для заданного N по числам накопителя необходимо определить значение k и, следовательно, N_k, которое превосходит N. В этом случае процесс вычислений вплоть до N_{k-1} включительно сводится лишь к переводу предполного просева в полный с использованием соотношений (20)–(26). И лишь на заключительном k-м этапе вычислений производится удаление элементов несобственных отсевов вплоть до числа N с использованием всех вышеприведенных соотношений второй рекуррентной формулы.

Задача вычисления n-го простого числа ввиду рекуррентности вычислений эквивалентна задаче вычисления n упорядоченных простых чисел. Особенность аналитического решения данной задачи заключается в том, что необходимо определить тот последний полный просев, который содержит отыскиваемое n-е простое число. С этой целью при формировании каждого очередного полного просева проводится контрольный подсчет максимального числа содержащихся в нем простых чисел. Для этого определяется значение $\sqrt{N_k}$ и отыскивается в рамках соответствующего полного просева $p_{\max} \le \sqrt{N_k}$. Далее с использованием всех простых чисел по $p_{\max}$ включительно по формулам (16) и (17) определяется максимальное значение $\pi(N_k)$. Если $n > \pi(N_k)$, то процесс формирования полных просевов продолжается дальше. В противном случае с использованием соотношений второй рекуррентной формулы и с учетом числа простых чисел накопителя вычисляется простое число последнего полного просева, порядковый номер которого в соответствии с соотношением (42) удовлетворяет поставленной задаче.

Следует, однако, заметить, что начиная со значения $N_7 = 510510$, простое число $p_{\max}$ лежит за пределами квадрата второго элемента полного просева D_7, поскольку $p_8^2 = 361$, а $p_{\max} = 709$. Поэтому, начиная с полного просева D_7, для отыскания $p_{\max}$ в процессе контрольных подсчетов необходимо из полного просева с использованием соотношений второй рекуррентной формулы дополнительно удалить элементы соответствующих числа несобственных отсевов вплоть до выполнения условия $\left(d_{k+1,2}^{k+\alpha+1}\right)^2 > \sqrt{N_k}$.

В заключение отметим, что основной результат статьи – сформулированная выше теорема был получен автором в 1999 г. Первый вариант настоящей статьи имел название «Формула простого числа» и был представлен на оппонирование вначале в Математический институт им. В.А. Стеклова (в редакцию журнала «Математические заметки») в феврале 2001 г., а затем – в МГУ им. М.В. Ломоносова (на кафедру теории чисел) в феврале 2002 года.

Статья поступила 6.05.2002 г.

Литература

1. **Смирнова (Битнер) Х.А.** Аналитическая форма решета Эратосфена // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6, №2. – С. 583–597.

2. **Архангельская В.М.** Элементарная теория чисел. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1963.